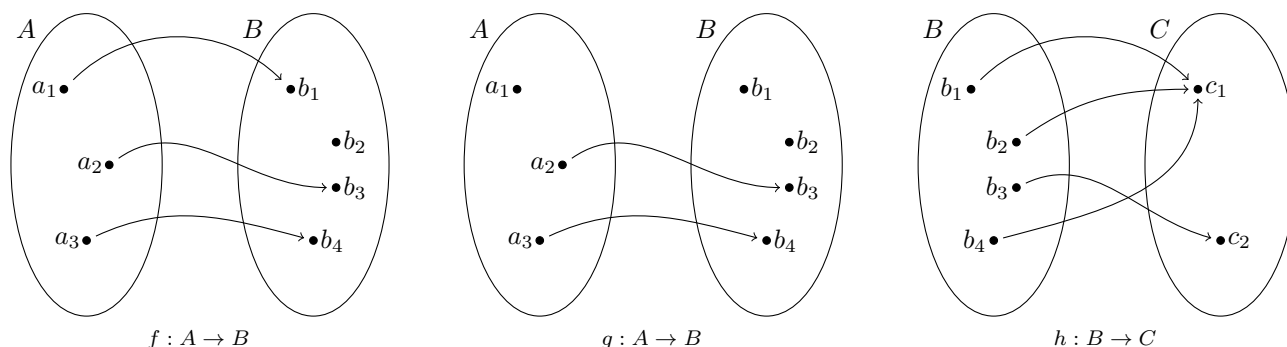


## Matematica generale: esonero dell'8 novembre 2011

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato *insufficiente*.

1. Siano  $f$ ,  $g$  e  $h$  come nella figura che segue:



- Dire quali tra  $f$ ,  $g$  e  $h$  non sono funzioni, e perché.
- Per ciascuna funzione, dire quali sono il dominio e l'immagine.
- Per ciascuna funzione, dire se è iniettiva. Giustificare la risposta.
- Si può fare la composizione  $h \circ f$  tra  $f$  ed  $h$ ? Se sì, descriverla con un disegno come in figura.

2. Risolvere la disequazione fratta  $\frac{x^2 + 7x + 11}{x + 4} + 1 \geq 0$ .

3. Siano  $f$ ,  $g$  e  $h$  definite come segue:

$$f(x) = e^{5(\sqrt{x})^2 + 1}, \quad g(x) = \ln \left( \frac{x^2 + 7x + 11}{x + 4} + 1 \right), \quad h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 1, \\ e^{5x+1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- Determinare il dominio di  $f$ ,  $g$  e  $h$ .
- Determinare l'immagine di  $f$ .
- Dire se esiste l'inversa di  $f$ , e se si calcolarla.
- Dire se si può fare la composizione  $g \circ f$ , e se si calcolarla.
- Dire se esiste, e se esiste calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x).$$

- Dire se  $h$  è una funzione continua. Se non lo è, dire per quali valori di  $x$  non è continua e perché.
- [*opzionale*] Se nella definizione di  $h$  sostituiamo  $x \leq 1$  con  $x < 1$ ,  $h$  è continua?

4. Dire, giustificando la risposta, se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{5n^2 - 2n + 1}{3(1+n)^2} \right)$$

converge. Se sì, calcolarne la somma.

5. Dire, giustificando la risposta, se la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n - 1}{4^n}$$

converge. Se sì, calcolarne la somma.