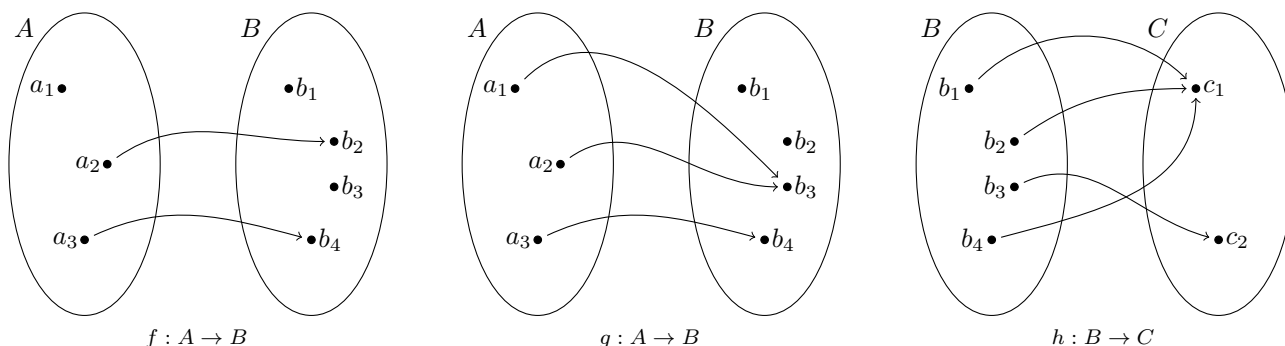


Matematica generale: esonero dell'8 novembre 2011

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato *insufficiente*.

1. Siano f , g e h come nella figura che segue:



- Dire quali tra f , g e h non sono funzioni, e perché.
 - Per ciascuna funzione, dire quali sono il dominio e l'immagine.
 - Per ciascuna funzione, dire se è iniettiva. Giustificare la risposta.
 - Si può fare la composizione $h \circ g$ tra g ed h ? Se sì, descriverla con un disegno come in figura.
2. Risolvere la disequazione fratta $\frac{x^2 - 6x + 7}{x - 4} - 2 \leq 0$.
3. Siano f , g e h definite come segue:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 6x + 7}{x - 4} - 2\right), \quad g(x) = \ln(6(\sqrt{x})^2 + 3), \quad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ \ln(6x + 3) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- Determinare il dominio di f , g e h .
 - Determinare l'immagine di g .
 - Dire se esiste l'inversa di g , e se si calcolarla.
 - Dire se si può fare la composizione $f \circ g$, e se si calcolarla.
 - Dire se esiste, e se esiste calcolare:
$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x).$$
 - Dire se h è una funzione continua. Se non lo è, dire per quali valori di x non è continua e perché.
 - [opzionale] Se nella definizione di h sostituiamo $x \leq 0$ con $x < 0$, h è continua?
4. Dire, giustificando la risposta, se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

converge. Se sì, calcolarne la somma.

5. Dire, giustificando la risposta, se la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

converge. Se sì, calcolarne la somma.